



CUADERNOS DE TRABAJO

FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

El campo de valores de una matriz y su
aplicación a los polinomios ortogonales

Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

Cuaderno de Trabajo número 01/2018



UCM

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Facultad para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Facultad www.ucm.es/BUCM/est/ y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

CONTACTO:

Biblioteca de la Facultad de Estudios Estadísticos

Universidad Complutense de Madrid

Av. Puerta de Hierro, S/N

28040 Madrid

Tlf. 913944035

buc_est@buc.ucm.es

Los trabajos publicados en la serie Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos no están sujetos a ninguna evaluación previa. Las opiniones y análisis que aparecen publicados en los Cuadernos de Trabajo son responsabilidad exclusiva de sus autores.

ISSN: 2341-2550

El campo de valores de una matriz y su aplicación a los polinomios ortogonales

Venancio Tomeo Perucha
Dpto. Álgebra, Geometría y Topología
Facultad Estudios Estadísticos, UCM
tomeo@ucm.es

Emilio Torrano Giménez
Dpto. Matemática Aplicada
Escuela Superior de Ingenieros Informáticos, UPM
emilio@fi.upm.es

8 de mayo de 2018

Resumen:

En este trabajo se define y se recuerdan las principales propiedades del campo de valores de una matriz y se visualizan campos de valores de matrices sencillas mediante el método de Montecarlo.

Se estudia además la caracterización de Murnaghan y se utiliza para dibujar campos de valores de otras matrices sencillas mediante el método de la envolvente.

Finalmente se aplican estas técnicas a las matrices de Hessenberg relativas a polinomios ortogonales sobre curvas del plano complejo, representando las curvas soporte mediante sumas obtenidas con la función de Riemann.

Palabras clave:

Campo de valores, envolvente convexa, matrices hermitianas, matrices normales, matrices de Hessenberg, autovalores, autovectores, polinomios ortogonales, función de Riemann.

1. Campo de valores de una matriz

Definición 1 Sea X un espacio con producto interno sobre el cuerpo \mathbb{C} y sea A un operador lineal $A : X \rightarrow X$. Entonces el campo de valores de A es el conjunto del plano complejo

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle \mid x \in X \wedge \|x\| = 1\}.$$

Teorema 1 (Toeplitz-Hausdorff) Dada una matriz¹ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, el campo de valores $W(A)$ es un conjunto convexo del plano.

DEM: Veamos una versión de [9]. Solo necesitamos considerar el caso en que $W(A)$ contiene al menos dos puntos. Sean $x_1, x_2 \in X = \mathbb{C}^n$ tales que $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ y

$$\langle Ax_1, x_1 \rangle = w_1, \quad \langle Ax_2, x_2 \rangle = w_2,$$

siendo los dos puntos de $W(A)$, w_1 y w_2 distintos. Puede ocurrir que $x_1 + zx_2 = 0$ con $z \in \mathbb{C}$ o que $x_1 + zx_2 = 0$. Supongamos que $x_1 + zx_2 = 0$ con $z \in \mathbb{C}$, entonces $zx_2 = -x_1$ y tomando normas

$$|z| \|x_2\| = \|-x_1\| \Rightarrow |z| = 1,$$

a partir de $x_1 = -zx_2$ tendríamos

$$w_1 = \langle Ax_1, x_1 \rangle = \langle -zAx_2, -zx_2 \rangle = z\bar{z}\langle Ax_2, x_2 \rangle = |z|^2 w_2 = w_2,$$

contra lo supuesto, luego $x_1 + zx_2 \neq 0$. En consecuencia $\|x_1 + zx_2\| > 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

El teorema quedará probado si mostramos que para cualquier número real dado $0 < t < 1$, existe al menos un número complejo $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación

$$\frac{\langle A(x_1 + zx_2), x_1 + zx_2 \rangle}{\|x_1 + zx_2\|^2} = tw_1 + (1-t)w_2. \quad (1)$$

¹Este resultado es válido también si se trata de operadores o matrices infinitas, lo único que puede cambiar en el caso infinito es que $W(A)$ puede ya no ser necesariamente cerrado, problema 212, de [6].

Dicho de otro modo, para cualquier punto $tw_1 + (1-t)w_2$ del "segmento" $[w_1, w_2]$ existe un vector $x_1 + zx_2 \in X$ cuya imagen es dicho punto; por tanto dicho segmento pertenece a $W(A)$. Al poder hacer esto para cualquier segmento terminado en puntos arbitrarios de $W(A)$ quedará probado el teorema.

Reescribamos la ecuación (1), operando convenientemente tendremos que el numerador será

$$\begin{aligned}\langle A(x_1 + zx_2), (x_1 + zx_2) \rangle &= \langle Ax_1, (x_1 + zx_2) \rangle + \langle Azx_2, (x_1 + zx_2) \rangle = \\ &= \langle Ax_1, x_1 \rangle + \langle Ax_1, zx_2 \rangle + \langle Azx_2, x_1 \rangle + \langle Azx_2, zx_2 \rangle = \\ &= w_1 + \bar{z}\langle Ax_1, x_2 \rangle + z\langle Ax_2, x_1 \rangle + |z|^2 w_2.\end{aligned}$$

En el otro miembro quedará $[tw_1 + (1-t)w_2] ||x_1 + zx_2||^2$, es decir

$$w_1 + \bar{z}\langle Ax_1, x_2 \rangle + z\langle Ax_2, x_1 \rangle + |z|^2 w_2 = [tw_1 + (1-t)w_2] ||x_1 + zx_2||^2.$$

La norma que aparece en el lado derecho se puede escribir

$$\begin{aligned}||x_1 + zx_2||^2 &= \langle x_1 + zx_2, x_1 + zx_2 \rangle = \langle x_1, x_1 + zx_2 \rangle + \langle zx_2, x_1 + zx_2 \rangle = \\ &= 1 + \bar{z}\langle x_1, x_2 \rangle + z\langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle |z|^2,\end{aligned}$$

tras multiplicar por $[tw_1 + (1-t)w_2]$, pasando al otro miembro y sacando $|z|^2$ factor común, teniendo en cuenta la trivial identidad

$$|z|^2[w_2 - tw_1 - (1-t)w_2] = |z|^2[t(w_2 - w_1)],$$

quedará finalmente

$$|z|^2[t(w_2 - w_1)] + z\boxed{1} + \bar{z}\boxed{2} + [w_2 - tw_1 - (1-t)w_2].$$

Llamando $p = [t(w_2 - w_1)]$, $q = \boxed{1}$, $r = \boxed{2}$, $s = (1-t)(w_1 - w_2)$, podemos escribir (1) como

$$p|z|^2 + qz + r\bar{z} + s = 0, \tag{2}$$

donde $q, r \in \mathbb{C}$, no importa cuales sean. Dividiendo la anterior ecuación por p queda

$$|z|^2 + \frac{q}{p}z + \frac{r}{p}\bar{z} + \frac{s}{p} = 0,$$

y separando la parte real y la imaginaria, ya que $z = x + yi$, tendremos, observando que $\frac{s}{p} = -\frac{(1-t)}{t}$,

$$\text{Real} : \equiv x^2 + y^2 + ax + by - \frac{(1-t)}{t} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Imag.} : \equiv cx + dy = 0, \quad (4)$$

donde a, b, c, d son números reales perfectamente definidos a partir de A, x_1, x_2 , pero que no son fundamentales en el razonamiento. Resulta que

$$x^2 + y^2 + ax + by - \frac{(1-t)}{t} = 0$$

es una circunferencia que tiene el origen en su interior, puesto que

$$R^2 - m^2 - n^2 = \frac{(1-t)}{t} > 0.$$

Por otro lado, la recta $cx + dy = 0$ pasa por el origen, luego la solución del sistema (3),(4) existe y está compuesta por dos puntos z_1, z_2 que lo satisfacen, y por tanto (2), y en consecuencia (1) tienen solución. Luego el teorema está demostrado. \square

Veamos unos teoremas elementales (véase [7]), pero que conviene recordar.

Teorema 2 *El campo de valores de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es invariante bajo transformaciones unitariamente semejantes. Es decir si $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es unitaria, entonces*

$$W(A) = W(UAU^H).$$

DEM: Tenemos que

$$\langle UAU^H x, x \rangle = \langle AU^H x, U^H x \rangle = \langle Ay, y \rangle$$

tras un simple cambio $y = U^H x$. Si $\langle x, x \rangle = 1$, entonces

$$\langle y, y \rangle = \langle U^H x, U^H x \rangle = \langle UU^H x, x \rangle = \langle x, x \rangle = 1.$$

Por tanto, $\alpha = \langle UAU^H x, x \rangle$ para algún $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $\langle x, x \rangle = 1$, si y solo si $\alpha = \langle Ay, y \rangle$ para algún $y \in \mathbb{C}^n$ tal que $\langle y, y \rangle = 1$. Es decir que $\alpha \in W(A) \Leftrightarrow \alpha \in W(UAU^H)$. \square

Este resultado nos conduce a una elegante descripción geométrica del campo de valores cuando la matriz es normal.

Veamos en primer lugar que todos los autovalores de una matriz arbitraria $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ están en $W(A)$. Si $\lambda \in \sigma(A)$ entonces existe un autovector $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $\langle x, x \rangle = 1$ verificando $Ax = \lambda x$ y es claro que

$$\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda.$$

Del Teorema 2 y de esta trivial observación se desprende que la envoltura convexa de los autovalores de A tiene que estar forzosamente incluida en $W(A)$, puesto que $\sigma(A) \subset W(A)$ y $W(A)$ es convexo.

Para matrices normales la geometría del campo de valores puede caracterizarse de un modo sencillo.

Teorema 3 *El campo de valores de una matriz normal $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ coincide con la envoltura convexa de sus autovalores.*

DEM: Si A es normal y sus autovalores son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, sabemos, (véase [3], Vol. I, pág. 273), que existe una matriz unitaria U , tal que $A = UDU^H$ donde $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$. El Teorema 2 afirma que $W(A) = W(D)$, y por tanto es suficiente probar que el campo de valores de la matriz diagonal D coincide con la envoltura convexa de las entradas de la diagonal principal.

Realmente $W(D)$ es el conjunto de números

$$\alpha = \langle Dx, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2,$$

donde $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$. Por otro lado la envoltura convexa de los puntos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ será el conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i \lambda_i : \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 \right\},$$

haciendo $\theta_i = |x_i|^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, y observando que, conforme x recorre todos los vectores tales que $\langle x, x \rangle = 1$, θ_i recorre todos los posibles valores $\theta_i \geq 0$ con $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$, queda probado el resultado. \square

Teorema 4 *El campo de valores de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es un intervalo de la recta real, si y solo si, A es hermitiana.*

DEM: Lo primero es tener en cuenta que si A es hermitiana, entonces es normal, y por el Teorema 3 sabemos que $W(A)$ es la envoltura convexa de los autovalores de A , que son todos ellos reales, véase por ejemplo [3], Vol. I, Th. 5 en pág. 273. Como los únicos conjuntos convexos sobre \mathbb{R} son los intervalos, hemos probado que si A es hermitiana, $W(A)$ es un intervalo de \mathbb{R} .

Recíprocamente, si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $W(A)$ es un intervalo de \mathbb{R} , podemos escribir

$$B = \Re(A) = \frac{1}{2}(A + A^H), \quad C = \Im(A) = \frac{1}{2i}(A - A^H),$$

y obtenemos

$$\langle Ax, x \rangle = \langle (B + Ci)x, x \rangle = \langle Bx, x \rangle + \langle Cx, x \rangle i,$$

donde $\langle Bx, x \rangle$ y $\langle Cx, x \rangle$ son números reales puesto que B y C son hermitianas. Pero como $W(A)$ está constituido únicamente por números reales, por tanto $\langle Cx, x \rangle = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$ tal que $\langle x, x \rangle = 1$. En consecuencia $C = 0$, luego $A = A^H$. \square

Corolario 1 Si A es hermitiana con autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, entonces

$$W(A) = [\lambda_1, \lambda_n].$$

Recíprocamente, si $W(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$, entonces A es hermitiana y λ_1, λ_n son respectivamente el mínimo y el máximo de los autovalores de A .

DEM: Este resultado es una consecuencia inmediata de los teoremas 3 y 4. \square

Ejemplo 1 Es claro que una matriz finita, diagonal, compleja o no, es siempre normal. Por tanto el campo de valores será la envoltura convexa de sus elementos. Sean las matrices normales

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix},$$

y

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2-i \end{pmatrix}.$$

Tendremos respectivamente

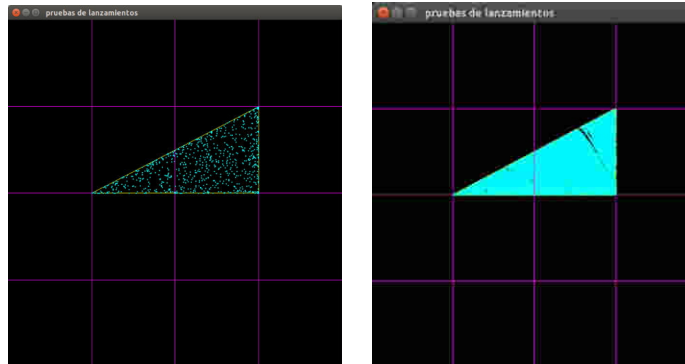


Figura 1. Triángulo del método de Montecarlo y anomalías

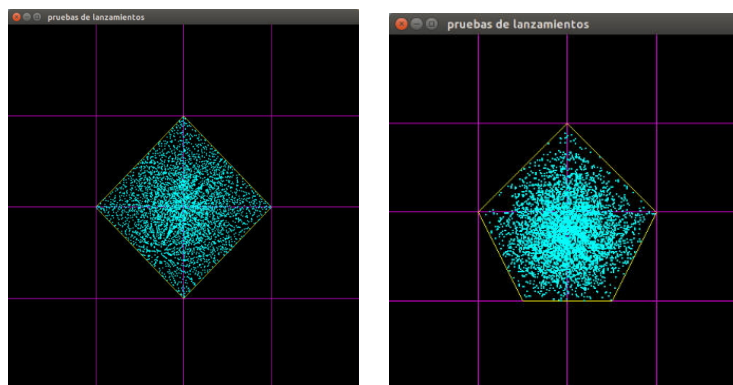


Figura 1.2. Cuadrado y pentágono

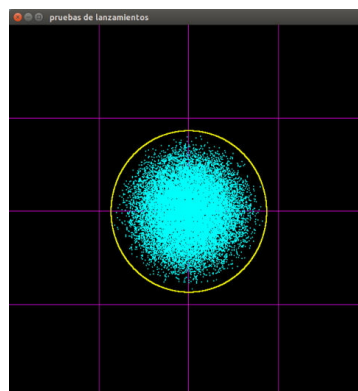


Figura 3. El shift-right 5×5 y su verdadero radio

No obstante si la matriz no es normal, como en el caso de las secciones del shift-right resultará que $W(D_n)$ es una sucesión de círculos concéntricos, cuyo radio resulta fácil de averiguar puesto que

$$\Re(S_R) = J, \quad |xI_n - J_n| = U_n(x),$$

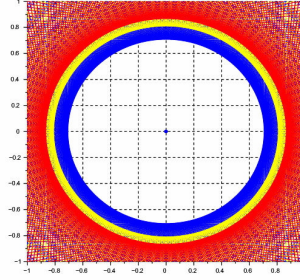


Figura 4. Campo de secciones del shift-right D_3 , D_4 y D_5

es decir la matriz tridiagonal de Jacobi correspondiente a los polinomios ortogonales $U_n(x)$ en $[-1, 1]$, y en consecuencia

$$r(W(D_n)) = \max\{x \mid U_n(x) = 0\},$$

es decir

$$\begin{aligned} r_{\max}(D_2) &= \frac{1}{2} = 0,5, & r_{\max}(D_3) &= \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071\dots, \\ r_{\max}(D_4) &= \frac{\sqrt{5}+1}{4} = 0,8090\dots, & r_{\max}(D_5) &= 0,9009\dots, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Observación 1 Hemos denominado método de Montecarlo al de generar aleatoriamente vectores $w = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ de dimensión n , con $z_k \in \mathbb{C}$, efectuar el producto w^*Aw y dividir por $\|w\|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2$. Lo que se consigue tomando $z_k = -10 + 20\text{rand}() + (-10 + 20\text{rand}())i$, es decir vectores en el cuadrado complejo $[-L, L] \times [-L, L]$, con $L = 10$. También se consigue eligiendo $z_k = (10 * \text{rand}())[\cos(2\pi \text{rand}()) + i \sin(2\pi)]$, es decir, tomando vectores dentro del círculo centrado en el origen de radio $r = 10$. Podemos escoger en vez de $L = r = 10\text{rand}()$, la cantidad $L = r = 10^{10\text{rand}()}$, con el peligro operacional imaginable.

2. Caracterización de Murnaghan

Pasemos a indagar la expresión analítica del campo de valores de una matriz. Abordaremos el problema inicialmente desde el punto de vista de Murnaghan (véase [8]).

Hemos visto que el campo de valores de una matriz hermitiana es un segmento del eje real que conecta el mayor y el menor de sus autovalores. Cualquier matriz A puede descomponerse en forma única $A = B + Ci$ donde B y C son sus componentes hermíticas, podemos escribir

$$\langle Ax, x \rangle = \langle (B + Ci)x, x \rangle = \langle Bx, x \rangle + \langle Cx, x \rangle i,$$

y donde los números $\langle Bx, x \rangle$ y $\langle Cx, x \rangle$ son por supuesto reales. Por tanto en el caso general $\langle Bx, x \rangle$ es la proyección de la región $\langle Ax, x \rangle$ sobre el eje OX mientras que $\langle Cx, x \rangle$ lo es sobre el eje OY .

Si denotamos por r el valor real del máximo autovalor de B , la recta $x = r$ perpendicular al eje OX contiene un punto de la frontera de la región $\langle Ax, x \rangle$. No existen puntos del campo a la derecha de dicha recta.

La idea de Murnaghan es sencilla: girar el campo de valores en torno al origen y volver a trazar la recta delimitadora perpendicular al eje OX . Cada vez que giremos el campo tendremos una recta delimitadora, si ahora tenemos todos los ángulos de giro y la distancia a la que se encuentran dicha recta del origen de coordenadas, tendremos que la envolvente de todas esas rectas es el campo de valores. Procedamos analíticamente $t = e^{i\theta}$ es un giro, consideremos ahora la matriz $\tilde{A} = A/t$. Resulta claro que el campo de valores $W(\tilde{A})$ será el campo de valores $W(A)$ girado un ángulo θ , o si se prefiere como si hubiéramos girado el eje un ángulo positivo θ . Llamemos

$$\tilde{B} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{e^{i\theta}} + A^H e^{i\theta} \right),$$

ya que $(\frac{A}{e^{i\theta}})^H = A^H e^{i\theta}$ y

$$r(\theta) = \lambda_{\max}(\tilde{B}),$$

$r(\theta)$ es real por tratarse \tilde{B} de una matriz hermitiana. Tenemos ya un método numérico, que hemos desarrollado con *scilab*, y es:

```

function s=campo(M)
t=0;
clf();
k=ceil(norm(M));
for i=1:300
t=t+2*%pi/300;
if abs(cos(t))>0.01 & abs(sin(t))>0.01
p=radio(t,M);
x=-k:2:k;
y=(p-cos(t)*x)/sin(t);
xgrid;
plot2d(x,y,style=[color("blue")],rect=[-k,-k,k,k])
end
end
endfunction;

function p=radio(t,M)
h=cos(t)+sin(t)*%i;
B=0.5*(M*conj(h)+M'*h);
p=max(real(spec(B)));
endfunction;

```

Para dibujar el campo de valores, basta con considerar la familia de rectas, una para cada valor de θ :

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \lambda_{\max} \left(\frac{A}{e^{i\theta}} + A^H e^{i\theta} \right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Numéricamente hemos de ser cuidadosos ya que λ_{\max} es el mayor autovalor no el autovalor de mayor absoluto y necesitamos un algoritmo que calcule todos los autovalores de

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A}{e^{i\theta}} + A^H e^{i\theta} \right).$$

Recordemos la ecuación hessiana de una recta

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p.$$

Como hemos llamado $t = e^{i\theta}$, $t = \cos \theta + i \sin \theta$. Sabemos que $z = x + yi$, luego se cumplirá que

$$\begin{aligned}\frac{z}{t} &= x \cos \theta + y \sin \theta - xi \sin \theta + yi \cos \theta \\ \bar{z} t &= x \cos \theta + y \sin \theta + xi \sin \theta - yi \sin \theta,\end{aligned}$$

de donde

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{t} + \bar{z} t \right) = p, \quad (5)$$

que es la forma de la ecuación de una recta que nos será de utilidad. Si consideramos, por ejemplo, un punto z_1 y llamamos p_1 a la distancia de ese punto a la recta $\frac{1}{2} \left(\frac{z}{t} + \bar{z} t \right)$, tendremos que esa distancia vale

$$p_1 = p - \frac{1}{2} \left(\frac{z_1}{t} + \bar{z}_1 t \right). \quad (6)$$

En efecto, la distancia de $z_1 = x_1 + y_1 i$ a la recta $p = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{t} + \bar{z} t \right)$, que es la $p - (x \cos \theta + y \sin \theta) = 0$, será

$$p_1 = \frac{p - (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)}{\sqrt{(-\sin \theta)^2 + (-\cos \theta)^2}},$$

y sin mas que utilizar (5) resulta (6).

Teorema 5 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ y sea

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

su forma Schur, entonces la frontera del campo de valores será la envolvente de las rectas dadas por la ecuación

$$\begin{vmatrix} -p_1 & \frac{c_{12}}{2t} & \frac{c_{13}}{2t} & \dots & \frac{c_{1n}}{2t} \\ \frac{\overline{c_{12}}}{2} t & -p_2 & \frac{\overline{c_{23}}}{2t} & \dots & \frac{\overline{c_{2n}}}{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\overline{c_{1n}}}{2} t & \frac{\overline{c_{2n}}}{2} t & \frac{\overline{c_{3n}}}{2} t & \dots & -p_n \end{vmatrix} = 0,$$

donde p_i es la distancia del autovalor λ_i a la recta genérica del haz (t, p) , para $i = 1, \dots, n$.

DEM: Aplicando el teorema de la descomposición de Schur, véase por ejemplo pág. 313 de [4], tenemos que

$$C = UAU^H,$$

donde U es unitaria, es decir $U^{-1} = U^H$ y C es triangular superior con los autovalores en la diagonal. Se tendrá

$$A = U^HCU, \quad \text{y} \quad A^H = U^HC^H U.$$

Resulta inmediato que

$$\left(\frac{A}{e^{i\theta}} + A^H e^{i\theta} \right) = U^H \left(\frac{C}{e^{i\theta}} + C^H e^{i\theta} \right) U,$$

y tendremos que

$$\lambda_{\max} \left(\frac{A}{e^{i\theta}} + A^H e^{i\theta} \right) = \max \left\{ \det \left[pI - \left(\frac{A}{e^{i\theta}} + A^H e^{i\theta} \right) \right] = 0 \right\}.$$

Pero es claro que al ser $U^H U = I$, se cumple

$$\begin{aligned} \det \left[pI - \left(\frac{A}{t} + A^H t \right) \right] &= \det \left[U^H \left(pI - \left(\frac{A}{t} + A^H t \right) \right) U \right] = \\ &= \det \left[pI - \frac{1}{2} \left(\frac{C}{t} + C^H t \right) \right]. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} &\det \left[pI - \frac{1}{2} \left(\frac{C}{t} + C^H t \right) \right] = \\ &= \begin{vmatrix} p - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{t} + \overline{\lambda_1} t \right) & -\frac{c_{12}}{2t} & -\frac{c_{13}}{2t} & \cdots & -\frac{c_{1n}}{2t} \\ -\frac{c_{12}}{2t} & p - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{t} + \overline{\lambda_2} t \right) & -\frac{c_{23}}{2t} & \cdots & -\frac{c_{2n}}{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{c_{1n}}{2t} & -\frac{c_{2n}}{2t} & -\frac{c_{3n}}{2t} & \cdots & p - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_n}{t} + \overline{\lambda_n} t \right) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, como hemos visto que

$$p_i = p - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_i}{t} + \overline{\lambda_i} t \right),$$

sustituyendo queda finalmente

$$\begin{vmatrix} -p_1 & \frac{c_{12}}{2t} & \frac{c_{13}}{2t} & \cdots & \frac{c_{1n}}{2t} \\ \frac{c_{12}}{2}t & -p_2 & \frac{c_{23}}{2t} & \cdots & \frac{c_{2n}}{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c_{1n}}{2}t & \frac{c_{2n}}{2}t & \frac{c_{3n}}{2}t & \cdots & -p_n \end{vmatrix} = 0.$$

□

Ejemplo 2 Sean las matrices diagonales arriba vistas

$$M = \text{diag}(-1, 1+i, 1), \quad M = \text{diag}(-1, i, 1, -i), \quad M = \text{diag}(-1, i, 1, 1/2-i, -1/2-i),$$

con lo que construimos los campos de valores

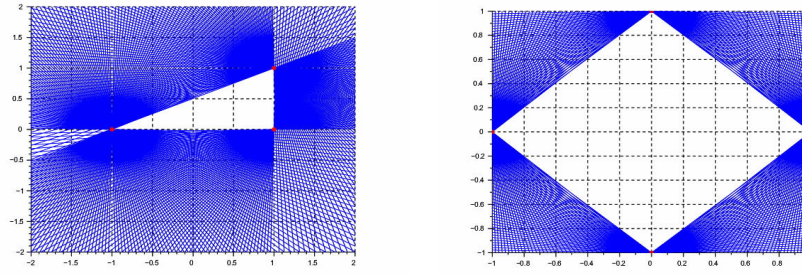


Figura 5. El método de la envolvente en el triángulo y el cuadrado y para el pentágono

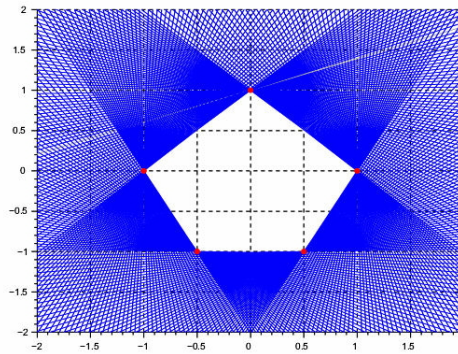


Figura 6. El método de la envolvente para el pentágono

El caso $n = 2$

Proposición 1 *El campo de valores correspondiente al caso de una matriz 2×2 es siempre una elipse, degenerada o no, cuyos focos son los autovalores.*

DEM: Es un caso particularmente sencillo, si $n = 2$, entonces desaparece t . En efecto

$$\begin{vmatrix} -p_1 & \frac{c_{12}}{2t} \\ \frac{c_{12}}{2}t & -p_2 \end{vmatrix} = 0,$$

tendremos

$$p_1 p_2 = \frac{|c_{12}|^2}{4}.$$

Dados dos puntos del plano $\lambda_1 \equiv (x_1, y_1)$, $\lambda_2 \equiv (x_2, y_2)$ y una constante $\frac{|c_{12}|^2}{4} \equiv k$, ¿cuál es el lugar geométrico determinado por la envolvente de una familia de rectas, con la propiedad de que cada una de las rectas de la familia sea tal que el producto de las distancias a dos puntos fijos λ_1 , λ_2 , sea k ?

Desarrollemos lo anterior con algo de detalle, si consideramos que la ecuación la recta genérica es $mx + ny + 1 = 0$, se tendrá

$$\frac{(mx_1 + ny_1 + 1)(mx_2 + ny_2 + 1)}{m^2 + n^2} = k,$$

operando tendremos

$$m^2(x_1 x_2 - k) + n^2(y_1 y_2 - k) + mn(x_1 y_2 + y_1 x_2) + m(x_1 + x_2) + n(y_1 + y_2) + 1 = 0.$$

Sin pérdida de generalidad y para simplificar escojamos $x_2 = y_2 = 0$, quedará

$$\begin{aligned} mx_1 + ny_1 + 1 &= k(m^2 + n^2) \\ mx + ny + 1 &= 0. \end{aligned}$$

La primera ecuación la podemos expresar más cómodamente como

$$m^2 - m \frac{x_1}{k} + n^2 - n \frac{y_1}{k} = \frac{1}{k}$$

o si se prefiere

$$\left(m - \frac{x_1}{2k}\right)^2 + \left(n - \frac{y_1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{k} + \frac{x_1^2}{4k^2} + \frac{y_1^2}{4k^2}.$$

Parece razonable llamar

$$a \equiv \frac{x_1}{2k}, \quad b \equiv \frac{y_1}{2k}, \quad R^2 \equiv \frac{1}{k} + \frac{x_1^2}{4k^2} + \frac{y_1^2}{4k^2},$$

y tendremos

$$\begin{aligned} (m - a)^2 + (n - b)^2 &= R^2 \\ mx + ny + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Despejando m y sustituyendo en la segunda ecuación queda

$$\left(a \pm \sqrt{R^2 - (n - b)^2}\right)x + ny + 1 = 0.$$

Queda todo en función del parámetro n . Eliminándolo entre esa ecuación y la derivada respecto a n :

$$\pm \frac{-(n - b)}{\sqrt{R^2 - (n - b)^2}}x + y = 0.$$

Operando resulta

$$(n - b)^2 = \frac{R^2 y^2}{x^2 + y^2},$$

despejando n y sustituyendo en la ecuación sin derivar, queda

$$ax \pm \frac{Rx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + by \pm \frac{Ry^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 = 0,$$

$$ax + by + 1 = \mp R\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado, para evitar ambigüedades con los signos, y agrupando, finalmente obtenemos la ecuación de la envolvente

$$x^2(a^2 - R^2) + y^2(b^2 - R^2) + 2abxy + 2ax + 2by + 1 = 0.$$

Obviamente es una cónica. Pasemos a estudiar sus invariantes:

$$I_3 = \begin{vmatrix} a^2 - R^2 & ab & a \\ ab & b^2 - R^2 & b \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = R^4 > 0.$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \begin{vmatrix} a^2 - R^2 & ab \\ ab & b^2 - R^2 \end{vmatrix} = R^2(R^2 - (a^2 + b^2)) = \\
&= R^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{x_1^2}{4k^2} + \frac{y_1^2}{4k^2} - \frac{x_1^2}{4k^2} - \frac{y_1^2}{4k^2} \right) = \frac{R^2}{k} > 0.
\end{aligned}$$

$$I_1 = (a^2 - R^2) + (b^2 - R^2) = -\frac{2}{k} - \frac{x_1^2}{4k^2} - \frac{y_1^2}{4k^2} < 0.$$

Se tiene que $I_2 > 0$, e $I_1 I_3 < 0$, luego es del género elipse. Calculemos los semiejes, sabemos que vienen dados por

$$\sqrt{\frac{2|I_3|}{|I_1| \left| I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2} \right|}}.$$

Operando se tiene:

$$\begin{cases} (+) \Rightarrow a = Rk, \\ (-) \Rightarrow b = \sqrt{k}. \end{cases}$$

Pueden obtenerse tambien las coordeandas del centro de la elipse, que serán

$$\begin{aligned}
x &= \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{ab^2 - ab^2 + aR^2}{I_2} = ak = \frac{x_1}{2k}k = \frac{x_1}{2}, \\
y &= \frac{A_{23}}{A_{33}} = -\frac{(a^2 - R^2)b - a^2b}{R^2/k} = bk) \frac{y_1}{2},
\end{aligned}$$

que resultan coherentes con la elección $x_2 = y_2 = 0$ hecha para el segundo punto. Es inmediato ver que los puntos $\lambda_1 = (x_1, y_1)$ y $\lambda_2 = (x_2, y_2)$ son los focos, verificándose que $b^2 = \frac{1}{4}|c_{12}|^2$, con lo cual la elipse queda inequívocamente determinada. \square

Ejemplo 3 Matrices cuadradas no normales (si lo fueran el campo de valores sería un segmento), sea

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(M) = \{(3/4, 0), (-1/4, 0)\},$$

que por lo anterior son las coordenadas de los focos, el campo es

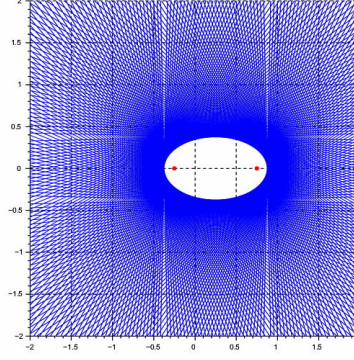


Figura 7. Los focos son los autovalores

El resultado de que *los autovalores de A son los focos de la frontera de $W(A)$* puede generalizarse. Aunque habría que analizar con detalle lo que se entiende por focos de las curvas que van apareciendo cuando $n > 2$.

3. Aplicación a la matriz infinita D y a sus secciones principales D_n

Es bien conocido el teorema de Fejér (véase por ejemplo [10]) que afirma:

Teorema 6 *Dada una medida μ que toma valores reales y positivos, y cuyo soporte es un compacto de \mathbb{C} , entonces todos los ceros de los $p_n(z)$ asociados a dicha μ caen en la envoltura convexa del soporte $\text{supp}(\mu)$.*

DEM: La demostración es muy elegante. Es conveniente trabajar con los polinomios mónicos, es decir sea $P_n = p_n/\gamma$, donde $p_n = \gamma z^n + \dots$. Es claro que tiene los mismos ceros que $p_n(z)$. Supongamos que $P_n(z_0) = 0$, con $z_0 \notin \text{conv}(\text{supp}(\mu))$. Podremos siempre escribir que $P_n(z) = (z - z_0)q_{n-1}(z)$.

Obviamente existirá una línea recta \mathcal{L} que separará el punto z_0 del soporte. Llamemos \hat{z}_0 a la proyección ortogonal del punto z_0 sobre la recta \mathcal{L} . Tendremos que $\forall z \in \text{supp}(\mu)$, se cumple necesariamente

$$|z - \hat{z}_0| < |z - z_0| \quad \Rightarrow \quad |(z - \hat{z}_0)q_n(z)| < |(z - z_0)q_n(z)| = |P_n(z)|.$$

Luego tendremos que

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp}(\mu)} |(z - \widehat{z}_0)q_n(z)|^2 d\mu &< \int_{\text{supp}(\mu)} |(z - z_0)q_n(z)|^2 d\mu = \\ &= \int_{\text{supp}(\mu)} |P_n(z)|^2 d\mu(z) = \|P_n(z)\|^2. \end{aligned}$$

Lo que es absurdo, puesto que el polinomio mónico $P_n(z)$, es el polinomio de norma mínima (propiedad de mínimo de los mónicos) y no el $(z - \widehat{z}_0)q_n(z)$. En consecuencia no puede ocurrir que $P_n(z_0) = 0$, con $z_0 \notin \text{conv}(\text{supp}(\mu))$. Luego todas las raíces de $P_n(z)$, sea cual sea n , caen dentro de la envoltura convexa del soporte. \square

Este teorema requiere la existencia de una medida, nosotros daremos una interpretación matricial de este resultado que puede expresarse en la forma siguiente.

Proposición 2 *Dada una matriz HDP infinita M , sea $\{p_n(z)\}_{n=0}^\infty$ la SPON correspondiente, entonces sea cual sea el valor de n , $p_n(z)$ tiene todos sus ceros en $W(D)$, donde $D = (d_{jk})_{j,k=0}^\infty$ se construye² a partir de los coeficientes d_{jk} que se obtienen mediante la fórmula*

$$zp_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} d_{j,n} p_j(z), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

DEM: Nótese que de las propiedades de D_n resulta que

$$\{z_{nk} \mid P_n(z_{nk}) = 0\} = \sigma(D) \subset W(D_n).$$

Por otro lado es trivial observar que $W(D_n) \subset W(D_{n+1}) \subset \dots \subset W(D)$, de donde resulta inmediato el resultado. \square

Observación 2 Si llamamos

$$Z = \{z \mid p_n(z), \quad n \in \mathbb{Z}_+\},$$

²O bien aplicando $D_n = T_n^{-1} M'_n T_n^{-H}$, donde $M_n = T_n T_n^H$ es la descomposición de Cholesky de M_n , sección $n \times n$ de la matriz de momentos M , y M'_n es la matriz $n \times n$ que resulta de eliminar en M la primera columna.

es claro que $\text{conv}(Z) \subset W(D)$, pero sin embargo la diferencia entre ambos conjuntos puede ser muy grande. Pensemos en la medida de Lebesgue sobre la circunferencia unidad. En ese caso $Z = \{0\}$, y sin embargo $W(D) = \mathbb{D}$.

Observación 3 Nótese que en la proposición anterior no es necesaria la existencia de medida. Basta con que M sea definida positiva. Se puede mejorar este resultado, pero exigiendo que haya medida.

El resultado principal que obtuvimos en [5], fue que cuando D proviene de una medida, es decir $M(\mu)$ es una matriz de momentos, se cumple, véase Proposición 3 más adelante, que

$$W(D_n) \subset \text{conv}(\text{supp}(\mu)).$$

Como es claro que

$$\text{supp}(\mu) \subset \text{conv}(\text{supp}(\mu)) \subset W(D) \subset \overline{\bigcup W(D_n)},$$

resulta

$$\text{conv}(\sigma(D)) = \overline{W(D)}.$$

En [5] sabíamos muy poco de la matriz-operador D . Tras descubrir e interpretar el artículo de Atzmon [1], establecimos en [12], y con más detalle en [11], que M es de momentos, si y solo si, D es subnormal (presuponiendo D y $\text{supp}(\mu)$ acotados).

En el capítulo 22 de [6], donde se estudia el campo de valores, se prueba que la clausura del campo de valores de un operador subnormal coincide con la envoltura convexa del espectro. Es decir si D es subnormal, lo que –como sabemos– solo ocurre si M es de momentos, se da la igualdad

$$\text{conv}(\sigma(D)) = \overline{W(D)}.$$

Luego el resultado de [5], se pudo obtener por otro camino, quizás más indirecto, vía teoría de operadores subnormales.

Con objeto de completar lo anterior reproduciremos la demostración de la proposición arriba citada.

Proposición 3 *Para $n = 1, 2, \dots$, se cumple que $W(D_n) \subset \text{conv}(\text{supp}(\mu))$.*

DEM: Sea $\zeta \in W(D_n)$, es decir $\zeta = \langle D_n v, v \rangle / \langle v, v \rangle$, con $v \in \mathbb{C}^m$, $v \neq 0$. Tendremos $D_n v = T_n^{-1} M'_n (T_n^*) v$, donde llamando $u = (T_n^*)^{-1} v$, con $u = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, de donde claramente se tiene $v = T_n^* u$.

En lo que sigue llamaremos

$$I(f(z)) = \int_{\text{supp}(\mu)} f(z) d\mu(z).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \langle D_n v, v \rangle &= \langle T_n^{-1} M'_n u, T_n^* u \rangle = \langle T_n T_n^{-1} M'_n u, u \rangle = \\ &= \langle M'_n u, u \rangle = \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{i+1,j} a_i \overline{a_j} = I(z |q_{n-1}(z)|^2), \end{aligned}$$

donde $q_{n-1}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle T_n^* u, T_n^* u \rangle = \langle T_n T_n^* u, u \rangle = \\ &= \langle M_n u, u \rangle = \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{i,j} a_i \overline{a_j} = I(|q_{n-1}(z)|^2), \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\zeta = \frac{I(z |q_{n-1}(z)|^2)}{I(|q_{n-1}(z)|^2)},$$

que es el centro de gravedad de $|q_{n-1}(z)|^2 d\mu(z)$ sobre el soporte $\text{supp}(\mu)$ considerado. En cualquier caso dicho centro de gravedad está contenido en $\text{conv}(\text{supp}(\mu))$. \square

Ejemplo 4 Consideremos los puntos y pesos siguientes:

$$z = [-1, 1+i, 1-i, i], \quad p = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4].$$

La matriz de momentos M de orden 5×5 será

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 - 1/4 i & 0 & -3/4 + 1/4 i & -3/2 \\ 3/4 + 1/4 i & 3/2 & 5/4 - 1/4 i & 0 & -7/4 + 1/4 i \\ 0 & 5/4 + 1/4 i & 5/2 & 9/4 - 1/4 i & 0 \\ -3/4 - 1/4 i & 0 & 9/4 + 1/4 i & 9/2 & 17/4 - 1/4 i \\ -3/2 & -7/4 - 1/4 i & 0 & 17/4 + 1/4 i & 17/2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos D_4 y resulta $D_4 =$

$$\begin{pmatrix} 3/4 - 1/4 i & (-1/7 + 3/28 i) \sqrt{14} & (-1/21 - 1/7 i) \sqrt{14} & (-1/30 + 1/10 i) \sqrt{10} \\ 1/4 \sqrt{14} & 19/28 - 1/28 i & -2/7 + 2/7 i & (-1/35 - 2/35 i) \sqrt{35} \\ 0 & 6/7 & 43/63 - 8/21 i & (-19/315 + 4/105 i) \sqrt{35} \\ 0 & 0 & 1/9 \sqrt{35} & 8/9 - 1/3 i \end{pmatrix}.$$

Obviamente

$$\sigma(D_4) = [-1, 1 + i, 1 - i, i].$$

Lo interesante es que cuando D_4 es normal, cosa que ocurre en este caso por tratarse de un caso discreto finito con 4 átomos, se produce un contacto entre $W(D_4)$ y $W(D_3)$.

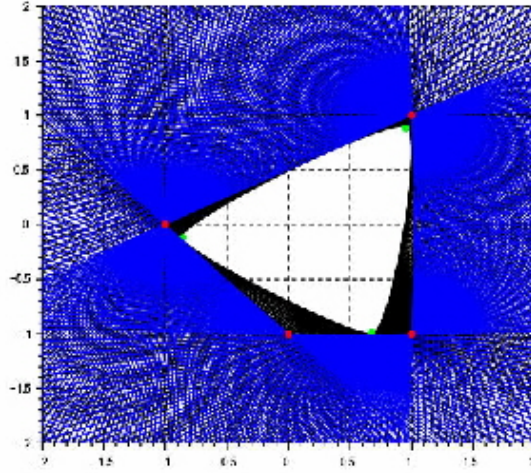


Figura 8. El contacto entre $W(D_4)$ y $W(D_3)$

Definición 2 Fijados $u, v \in \mathbb{C}^n$ y siendo A una matriz cuadrada de orden n , llamaremos

$$W_A[u, v] = \{w^* A w : \|w\| = 1 \wedge w \in L(u, v)\}.$$

Sean cuales sean u y v , siempre que $n \geq 2$, se cumple que $W_A[u, v] \subset W(A)$.

Enunciemos el siguiente Lema que se encuentra en [2].

Lema 1 Si A es una matriz normal de orden n y $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$, siendo $u, v \in \mathbb{C}^n$ los correspondientes autovectores, entonces $W_A[u, v] = [\lambda_1, \lambda_2]$.

A partir del lema hemos demostrado el siguiente resultado que nos permite relacionar los campos de valores de A_n y A_{n-1} .

Teorema 7 Si A_n es una matriz normal de orden n , entonces:

- i) $\forall \lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A_n), \lambda_i \neq \lambda_j$, se cumple $[\lambda_i, \lambda_j] \cap W(A_{n-1}) \neq \emptyset$.
- ii) Si $[\lambda_i, \lambda_j] \subset \partial W(A_n)$, se verifica $[\lambda_i, \lambda_j] \cap \partial W(A_{n-1}) \neq \emptyset$.

DEM: Por lo anterior $W_A[u, v] = [\lambda_i, \lambda_j]$, donde u y v son los autovectores de λ_i y λ_j . Tendremos que, al variar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $w = \alpha u + \beta v$, será tal que $w^* A_n w / w^* w$ recorrerá $[\lambda_i, \lambda_j]$. Dado que $u, v, w \in \mathbb{C}^n$, llamemos $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$, existirán $\alpha', \beta' \in \mathbb{C}$, tales que se cumpla para la última componente $\alpha' u_n + \beta' v_n = 0$. Llamando $x = \alpha' u_n + \beta' v_n$, tendremos que

$$\frac{x^* A_n x}{x^* x} = \frac{x_{n-1}^* A_{n-1} x_{n-1}}{x_{n-1}^* x_{n-1}} \in W(A_{n-1}),$$

por tanto $[\lambda_i, \lambda_j] \cap W(A_{n-1}) \neq \emptyset$.

La segunda parte es inmediata a partir de la primera recordando que $W(A_n)$ y $W(A_{n-1})$ son conjuntos convexos y $W(A_{n-1}) \subset W(A_n)$. En consecuencia $\partial W(A_n)$ solo puede alcanzarse con puntos de $W(A_{n-1})$ que sean de $\partial W(A_{n-1})$. \square

Ejemplo 5 Consideremos las hipocicloides dadas por las series siguientes, desarrollos en el infinito de la función de Riemann $\phi(z)$,

$$z + \frac{1/4}{z^2}, \quad z + \frac{1/4}{z^3}, \quad z + \frac{1/4}{z^4},$$

obviamente con z recorriendo la circunferencia unidad. Estamos presuponiendo unas distribuciones³ sobre las citadas hipocicloides que dan lugar a dichas matrices.

³Estas distribuciones, que no conocemos, y que dan lugar a esas matrices D esencialmente normales, lo que es sencillo de probar, no son muy diferentes de la *medida de equilibrio* sobre las respectivas hipocicloides. Basta verificar el parentesco de estas D 's con las $D(\mu_E)$'s calculadas numéricamente para las respectivas medidas de equilibrio. Podemos afirmar que existe una analogía con la relación existente entre las J de los Tchebyshev de segunda y de primera especie (esta última es la medida de equilibrio sobre el segmento).

Las hipocicloides son:

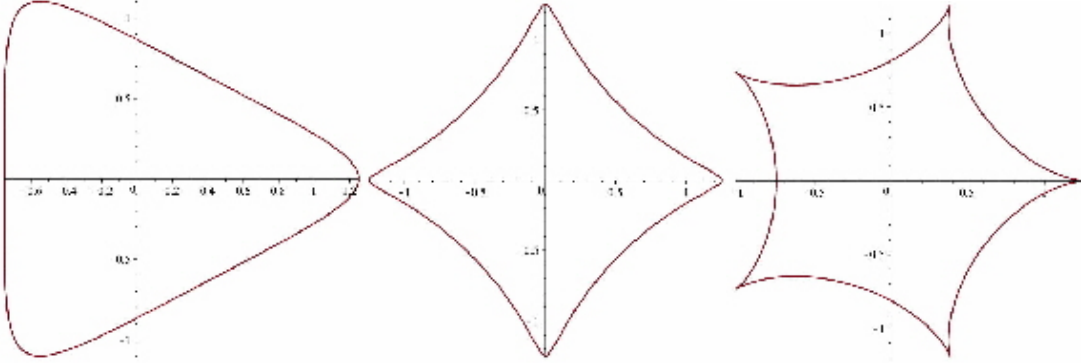


Figura 9. Las curvas soporte de las distribuciones

Las correspondientes matrices D son respectivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

y los campos de valores (el cálculo lo hemos hecho para 8×8) serán

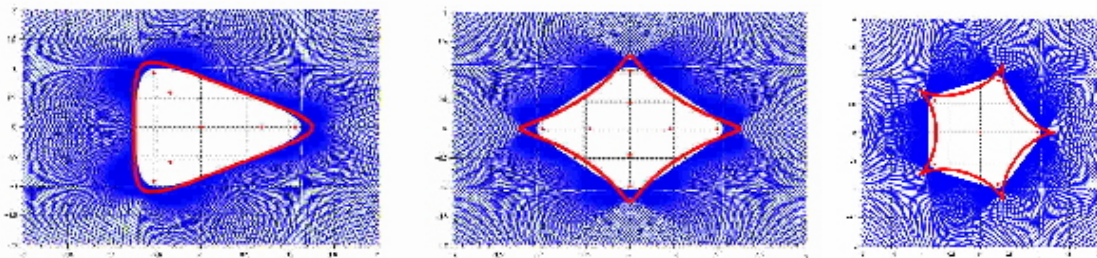


Figura 10. La envoltura convexa del soporte (no dibujada) contiene a los $W(D_8)$

Como vemos el campo de valores tiende a coincidir con la envoltura convexa del soporte, incluso para el caso de una matriz 8×8 .

Agradecimiento Este trabajo ha sido realizado como parte del proyecto MTM 2016-80582-R (AEI/FEDER, U.E.) del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad.

Referencias

- [1] A. Atzmon, *A moment problem for positive measures on the unit disc*, *Pacific J. Mathematics*, **59**, 2, (1975).
- [2] K.C. Das and Mary Embry-Wardrop, Orthogonality and the Numerical Range, *Linear Algebra and its Applications* 30; 63-67, 1980.
- [3] F. R. Gantmacher “The Theory of Matrices”, Vols. I y II, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., (reedition), 1977.
- [4] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan “Matrix computations”, Johns Hopkins University Press, Baltimore 1996.
- [5] R. Guadalupe, E. Torrano and J. Vinuesa *The Numerical Range of Hessenberg’s Matrix Associated with a Sequence of Orthogonal Polynomials on a Curve or on a Subset of the Complex Plane*, in *Approximation Theory VI*, Proceedings of the Sixth International Symposium on Approximation Theory, Texas A&M University, Vol. 1, Academic Press Inc., 307-310, (92b:33027).
- [6] Paul R. Halmos, “A Hilbert Space Problem Book”, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [7] P. Lancaster and M. Tismenetski, “Theory of Matrices”, Academic Press, 1985.
- [8] F. Murnaghan, *On the field of values of a square matrix*, *Proc. NAS* (1932), 246-248.
- [9] R.Raghavendran, *Haussdorf-Toeplitz Theorem*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20, 284-285, (1969).
- [10] E.B. Saff, *Orthogonal Polynomials from a complex perspective*, Ed. P. Nevai, *Orthogonal Polynomials*, 363-393, Kluwer Academic Press, 1990.
- [11] V. Tomeo, “La subnormalidad de la matriz de Hessenberg asociada a los P.O. en el caso hermitiano”, Tesis Doctoral, Madrid 2004.
- [12] E. Torrano y R. Guadalupe, *On the Moment Problem in the Bounded Case*, *J. Comp. Appl. Math.* **49** (1993) 263-269.



Cuadernos de Trabajo

Facultad de Estudios Estadísticos

- CT02/2015** **Prospectiva del proceso electoral a Rector de la Universidad Complutense 2015. Resultados del sondeo de intención de voto en primera y segunda vuelta**
Lorenzo Escot Mangas, Eduardo Ortega Castelló, Lorenzo Fernández Franco y Kenedy Alba (Coordinadores)
- CT01/2015** **The polemic but often decisive contribution of computer science to linguistic and statistical research on translation accuracy and efficiency**
Antonio Níguez Bernal
- CT05/2014** **Las medidas estadísticas: ejercicios motivadores**
Almudena Pajares García y Venancio Tomeo Perucha
- CT04/2014** **Jugando con la estadística (y la probabilidad)**
Gloria Cabrera Gómez
- CT03/2014** **Análisis Estadístico de las Consultas a la Base de Datos de Ayudas e Incentivos a Empresas de la Dirección General de Industria y de la PYME.**
Adolfo Coello de Portugal Muñoz, Juana María Alonso Revenga
- CT02/2014** **Values of games with weighted graphs**
E. González-Arangüena, C. Manuel; M. del Pozo
- CT01/2014** **Estimación de la tasa de retorno de la carta del censo de los Estados Unidos a través del modelo de regresión lineal y técnicas de predicción inteligentes.**
José Luis Jiménez-Moro y Javier Portela García Miguel
- CT03/2013** **Provisión de siniestros de incapacidad temporal utilizando análisis de supervivencia.**
Ana Crespo Palacios y Magdalena Ferrán Aranaz
- CT02/2013** **Consumer need for touch and Multichannel Purchasing Behaviour.**
R. Manzano, M. Ferrán y D. Gavilán
- CT01/2013** **Un método gráfico de comparación de series históricas en el mercado bursátil.**
Magdalena Ferrán Aranaz
- CT03/2012** **Calculando la matriz de covarianzas con la estructura de una red Bayesiana Gaussiana**
Miguel A. Gómez-Villegas y Rosario Susi
- CT02/2012** **What's new and useful about chaos in economic science.**
Andrés Fernández Díaz, Lorenzo Escot and Pilar Grau-Carles
- CT01/2012** **A social capital index**
Enrique González-Arangüena, Anna Khmel'nitskaya, Conrado Manuel, Mónica del Pozo
- CT04/2011** **La metodología del haz de rectas para la comparación de series temporales.**
Magdalena Ferrán Aranaz
- CT03/2011** **Game Theory and Centrality in Directed Social Networks**
Mónica del Pozo, Conrado Manuel, Enrique González-Arangüena y Guillermo Owen.

- CT02/2011** **Sondeo de intención de voto en las elecciones a Rector de la Universidad Complutense de Madrid 2011**
L. Escot, E. Ortega Castelló y L. Fernández Franco (coords)
- CT01/2011** **Juegos y Experimentos Didácticos de Estadística y Probabilidad**
G. Cabrera Gómez y M^a.J. Pons Bordería
- CT04/2010** **Medio siglo de estadísticas en el sector de la construcción residencial**
M. Ferrán Aranz
- CT03/2010** **Sensitivity to hyperprior parameters in Gaussian Bayesian networks.**
M.A. Gómez-Villegas, P. Main, H. Navarro y R. Susi
- CT02/2010** **Las políticas de conciliación de la vida familiar y laboral desde la perspectiva del empleador. Problemas y ventajas para la empresa.**
R. Albert, L. Escot, J.A. Fernández Cornejo y M.T. Palomo
- CT01/2010** **Propiedades exóticas de los determinantes**
Venancio Tomeo Perucha
- CT05/2009** **La predisposición de las estudiantes universitarias de la Comunidad de Madrid a auto-limitarse profesionalmente en el futuro por razones de conciliación**
R. Albert, L. Escot y J.A. Fernández Cornejo
- CT04/2009** **A Probabilistic Position Value**
A. Ghintran, E. González-Arangüena y C. Manuel
- CT03/2009** **Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores**
A. Pajares García y V. Tomeo Perucha
- CT02/2009** **La disposición entre los hombres españoles a tomarse el permiso por nacimiento. ¿Influyen en ello las estrategias de conciliación de las empresas?**
L. Escot, J.A. Fernández-Cornejo, C. Lafuente y C. Poza
- CT01/2009** **Perturbing the structure in Gaussian Bayesian networks**
R. Susi, H. Navarro, P. Main y M.A. Gómez-Villegas
- CT09/2008** **Un experimento de campo para analizar la discriminación contra la mujer en los procesos de selección de personal**
L. Escot, J.A. Fernández Cornejo, R. Albert y M.O. Samamed
- CT08/2008** **Laboratorio de Programación. Manual de Mooshak para el alumno**
D. I. de Basilio y Vildósola, M. González Cuñado y C. Pareja Flores
- CT07/2008** **Factores de protección y riesgo de infidelidad en la banca comercial**
J. M^a Santiago Merino
- CT06/2008** **Multinationals and foreign direct investment: Main theoretical strands and empirical effects**
María C. Latorre
- CT05/2008** **On the Asymptotic Distribution of Cook's distance in Logistic Regression Models**
Nirian Martín y and Leandro Pardo
- CT04/2008** **La innovación tecnológica desde el marco del capital intelectual**
Miriam Delgado Verde, José Emilio Navas López, Gregorio Martín de Castro y Pedro López Sáez

- CT03/2008** **Análisis del comportamiento de los indecisos en procesos electorales: propuesta de investigación funcional predictivo-normativa**
J. M^a Santiago Merino
- CT02/2008** **Inaccurate parameters in Gaussian Bayesian networks**
Miguel A. Gómez-Villegas, Paloma Main and Rosario Susi
- CT01/2008** **A Value for Directed Communication Situations.**
E. González-Arangüena, C. Manuel, D. Gómez, R. van den Brink



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID